Dr. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Julia Eich

Modulformen I
WS 09/10

Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 12

Modulformen für $\Gamma_0(4)$

45. Identitäten zwischen Eisensteinreihen

    Beweisen Sie die folgende Identitäten durch Manipulation von Potenzreihen und unendlichen Produkten in $q = e^{2\pi i\tau}$.

    (a) (1 Punkt) $E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - E_2(\tau) = 48 \sum_{n>0,\, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n) q^n$;

    (b) (1 Punkt) $E_k(\tau) - (1 + p^{k-1}) E_k(p\tau) + p^{k-1} E_k(p^2\tau) = -\frac{2k}{B_k} \sum_{p \nmid n} \sigma_{k-1}(n) q^n$, $k \geq 2$, p eine Primzahl;

    (c) (1 Punkt) $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) = \frac{1}{2}\left(E_2(\tau) - E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right)\right)$;

    (d) (1 Punkt) $\eta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{48}} \frac{\eta^3(2\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$.

46. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ als η–Produkt

    (a) (1 Punkt) Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 17(b) um zu zeigen, dass

    $$(\eta(\tau)\eta(2\tau))^8 \in S_8(\Gamma_0(2)).$$

    (b) (1 Punkt) Es sei $f(\tau)$ eine Funktion mit Periode 1, die $f\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = (-4\tau^2)^{\frac{k}{2}} f(\tau)$ für gerades k erfüllt. Zeigen Sie, dass $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

    (c) (2 Punkte) Benutzen Sie Aufgabe (a) und (b), sowie Aufgabe 45 um zu zeigen, dass

    $$\frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

    und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

47. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ aus der Eisensteinreihe E_2

    (a) (1 Punkt) Für $a \in \mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass

    $$E_2(ST^{-a}S\tau) = (a\tau + 1)^2 E_2(\tau) + \frac{12a}{2\pi i}(a\tau + 1).$$

(b) (1 Punkt) Sei

$$F_2(\tau) = -\frac{1}{24}(E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau)) = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ungerade}}} \sigma_1(n)q^n$$

gemäss Aufgabe 45. Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) \in M_2(\Gamma_0(4))$ ist, und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) = \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}$. Leiten Sie daraus die Identität

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^4(1+q^{2n})^4 = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ungerade}}} \sigma_1(n)q^n$$

her.

(d) (1 Punkt) Geben Sie einen anderen Beweis dafür, dass $-24F_2(\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right))$ in $M_2(\Gamma_0(4))$ ist, indem Sie ganz allgemein zeigen, dass $E_2(\tau) - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} E_2\left(\tau + \frac{j}{N}\right) \in M_2(\Gamma_0(N^2))$.

48. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ aus Thetareihen
Es sei $g(\tau) = \theta(2\tau, 0)$ und $G_2(\tau) = g(\tau)^4$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) + g\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = 2g(4\tau)$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $G_2 \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass F_2 aus Aufgabe 47 und G_2 linear unabhängig sind.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\frac{\eta(2\tau)^{20}}{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^8} \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} = e^{-\frac{2\pi i}{24}}\frac{\eta\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2}{\eta(2\tau)}$.

Abgabetermin: Freitag, 22.1.2010 um 10:00 Uhr.